

二维寿命分散系数和二维强度缩减系数

北京航空航天大学 傅惠民* 熊峻江

【摘要】 提出了二维寿命分散系数和二维强度缩减系数的概念和公式,从而可以综合利用当前数据和经验数据,得到更接近于母体真值的安全寿命和安全强度。该公式不但适用于完全数据,而且也适用于不完全数据和无失效数据。

主题词 疲劳寿命 疲劳强度 可靠性分析

分类号 V215.51 O346.23

1 二维寿命分散系数和二维强度缩减系数公式

1.1 二维寿命分散系数公式

设对数寿命 $\log N$ 遵循均值为 μ 和方差为 σ^2 的正态分布,即 $\log N \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。如果 $\log \hat{N}_{50}$ 和 s^2 分别为 μ 和 σ^2 的无偏估计量,并且

$$\log \hat{N}_{50} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad (1)$$

$$ns^2/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu) \quad (2)$$

那么置信度为 Y 、可靠度为 R 的安全寿命 $\hat{N}_R$ 将由下式给出

$$\hat{N}_R = \hat{N}_{50} / L_f(n, \nu) \quad (3)$$

$$L_f(n, \nu) = 10^{k(n, \nu)s} \quad (4)$$

式中 $L_f(n, \nu)$ 被称为二维寿命分散系数, $k(n, \nu)$ 为二维单侧容限系数^[1],当 $\nu > 2$ 时,可由下式计算^[1, 2]

$$k(n, \nu) = \frac{u_R + u_Y}{1 - u_Y^2/w} \cdot \frac{(1 - u_Y^2/w)/n + u_R^2/w}{2\nu - 1} \quad (5)$$

$$w = \frac{2(\nu + u_Y - c - 1/\nu + u_Y - c)}{\nu + u_Y - c} \quad (6)$$

其中 n 被定义为子样均值 $\log \hat{N}_{50}$ 的自由度, ν 为子样方差 s^2 的自由度; u_R 和 u_Y 均为标准正态偏量,即 $R = \Phi(u_R)$ 和 $Y = \Phi(u_Y)$ 。由于 $\log \hat{N}_{50}$ 和 s^2 可以来自不同的子样,所以 ν 不一定等于 $n-1$, ν 和 n 之间没有任何关系,这也就是“二维”的含义。 c 值可由文献[2]查得($P = 1 - R$),当 $\nu \geq 5$ 时,可取 $c = 0.64$,即式(6)成为

$$w = \frac{2(\nu + u_Y - 0.64 - 1/\nu + u_Y - 0.64)}{\nu + u_Y - 0.64} \quad (7)$$

设 $N_1, N_2, \dots, N_n$ 为来自该母体的一组寿命数据,如果它们是完全数据,那么 $\hat{N}_{50}$ 和 s 分别由下面两式计算

$$\hat{N}_{50} = \sqrt[n]{N_1 N_2 \cdots N_n} \quad (8)$$

$$s = \left[\sum_{i=1}^n (\log N_i - \log \hat{N}_{50})^2 \right] \backslash (n-1) \quad (9)$$

此时 $v = n-1$; 如果它们是不完全数据或无失效数据, 则可根据文献[2, 3]中方法求得 $\hat{N}_{50}$ 和 s 。

1.2 二维强度缩减系数公式

1.2.1 强度遵循正态分布的情况

设强度 $S \sim N(\mu, \sigma^2)$, 如果 $\hat{S}_{50}$ 和 s^2 分别为 μ 和 σ^2 的无偏估计量, 且它们的自由度分别为 n 和 v 。那么置信度为 γ 、可靠度为 R 的安全强度 $\hat{S}_R$ 由下式计算

$$\hat{S}_R = r(n, v) \hat{S}_{50} \quad (10)$$

式中

$$r(n, v) = 1 - k(n, v) C_v(n, v) \quad (11)$$

被称为二维强度缩减系数, $C_v(n, v) = s / \hat{S}_{50}$ 被定义为二维变异系数, $k(n, v)$ 由式(5)计算。

设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是来自该强度母体的一组完全数据, 那么 $\hat{S}_{50}$ 和 s 分别为

$$\hat{S}_{50} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i \quad (12)$$

$$s = \left[\sum_{i=1}^n (S_i - \hat{S}_{50})^2 \right] \backslash (n-1) \quad (13)$$

此时 $v = n-1$; 对于不完全强度数据或无失效数据, 可根据文献[2, 3]中方法求得 $\hat{S}_{50}$ 和 s 。

1.2.2 强度遵循对数正态分布的情况

设 $\log S \sim N(\mu, \sigma^2)$, 那么置信度为 γ 、可靠度为 R 的安全强度 $\hat{S}_R$ 由下式给出

$$\hat{S}_R = r^*(n, v) \hat{S}_{50} \quad (14)$$

$$r^*(n, v) = 10^{-k(n, v)s} \quad (15)$$

式中 $r^*(n, v)$ 被定义为二维强度缩减系数, $\log \hat{S}_{50}$ 和 s^2 分别为 μ 和 σ^2 的无偏估计量, 其自由度分别为 n 和 v 。对于一组完全强度数据 $S_1, S_2, \cdots, S_n$, $\hat{S}_{50}$ 和 s 分别由下面两式求得

$$\hat{S}_{50} = \sqrt[n]{S_1 S_2 \cdots S_n} \quad (16)$$

$$s = \left[\sum_{i=1}^n (\log S_i - \log \hat{S}_{50})^2 \right] \backslash (n-1) \quad (17)$$

此时 $v = n-1$ 。对于不完全强度数据或无失效数据, $\hat{S}_{50}$ 和 s 可由文献[2, 3]中方法计算。

2 当前数据和经验数据的综合利用

从式(5)可以看出, 当自由度 n 和 v 增加时, $k(n, v)$ 将减小, 因而由式(3)、式(10)和式(14)求得的置信下限(安全寿命和安全强度)都将更接近于各自的母体真值。这表明可以综合利用当前数据和经验数据, 提高子样均值 $\bar{x}$ ($\log \hat{N}_{50}$ 、 $\hat{S}_{50}$ 或 $\log \hat{S}_{50}$) 和方差 s^2 的自由度, 以减少试件个数, 提高预测精度。

2.1 当前数据和经验数据的组合方差

设子样方差 s_i^2 的自由度为 v_i , $E(s_i^2) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 且它们相互独立, 那么组合方差

$$s^2 = \sum_{i=1}^m v b_i s_i^2 \sqrt{\sum_{i=1}^m v} \quad (18)$$

的自由度 $v = \sum_{i=1}^m v$, 可以证明, 当取 $b_i \geq \sigma^2 / \sigma^2$ 时, 将组合方差 s^2 代入式(3)、式(10)和式(14), 即可求得置信度至少为 γ 的安全寿命和安全强度。

判断 $b_i \sigma_i^2$ 是否大于或等于 σ^2 , 通常可采用两种方法, 一是假设检验, 如 F 检验; 二是根据经验和物理性质进行判断, 例如, 在其他条件相同的情况下, “金属材料的寿命分散性不会大于复合材料的寿命分散性”; “缺口试件的寿命分散性不会大于光滑试件的寿命分散性”; “试件在高应力(或高应变)水平的寿命分散性不会大于低应力(或低应变)水平的寿命分散性”等等。

对于满足条件 $b_i \geq \sigma^2 / \sigma^2$ 的 b_i , 应选得越小越好。因为 b_i 太大, 会导致在提高组合方差 s^2 的自由度, 减小 $k(n, v)$ 值的同时, s^2 值也变得较大, 最后根据式(3)、式(10)和式(14)求得的置信下限(安全寿命和安全强度)反而变小, 即更加偏离各自的母体真值。这样的子样方差 s_i^2 提供不了有价值的信息, 所以不宜采用。

如果已知 $\sigma = \sigma$, 那么可取 $b_i = 1$ 。如果已知 σ 不大于某一上界 σ^o , 即 $\sigma \leq \sigma^o$, 则可取 $s = \sigma^o$, 其自由度 $v \rightarrow +\infty$ 。

2.2 当前数据和经验数据的组合均值

设 $\bar{x}_i$ ($\log \hat{N}_{50i}$ 、 $\hat{S}_{50i}$ 或 $\log \hat{S}_{50i}$) 是来自正态母体 $N(\mu_i, \sigma^2)$ 的子样均值, 其子样大小为 n_i , $i = 1, 2, \dots, m$, 且它们相互独立, 若组合均值

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i d_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m n_i} \quad (19)$$

的自由度取 $n = \left(\sum_{i=1}^m n_i \right)^2 \sqrt{\sum_{i=1}^m n_i d_i^2 e_i}$, 其中 $e_i \geq \sigma_i^2 / \sigma^2$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。那么可以证明, 如果 $d_i \mu_i \leq \mu$, $i = 1, 2, \dots, m$, 或 $E(\bar{\bar{x}}) \leq \mu$, 则将组合均值 $\bar{\bar{x}}$ 代入式(3)、式(10)和式(14), 可以求得置信度至少为 γ 的安全寿命或安全强度。

对于以往数据提供的子样均值 $\bar{x}_i$, 若要有可利用的价值, 除了选择的 d_i 和 e_i 满足上述条件外, 还要求 $\bar{x}_i$ 经过式(19)组合后, 将组合均值 $\bar{\bar{x}}$ 代入式(3)、式(10)和式(14)求得的置信下限(安全寿命和安全强度)应增大。

同样, 可采用假设检验或根据经验和有关物理性质确定 d_i 和 e_i 。特别当 $\sigma = \sigma$ 时, 可取 $e_i = 1$; 当 $\mu_i = \mu$ 时, 可取 $d_i = 1$ 。

3 实例分析

例1 某厂家对新改型的产品进行了全尺寸疲劳试验, 由于经济原因, 只做了一个试件, 其寿命 $t = 18000\text{h}$, 现要求新产品置信度 $\gamma = 90\%$ 、可靠度 $R = 99.9\%$ 的安全寿命。

该厂家曾对以往生产的同类产品作了跟踪调查, 收集到 26 个产品的寿命数据, 求得其对数寿命标准差 $s = 0.16$, 自由度 $v = 25$ 。考虑到近几年来冶金技术的不断提高, 该厂设备更新、技术培训和质量管理的实施等等, 各种波动因素得到了进一步控制。所以, 在外场使用条件类似的情况下, 可以认为新产品的寿命分散性不会大于老产品的寿命分散性, 即 $\sigma^2 \leq E(s^2)$, 因此可取 $b_i = 1$ 。根据式(4)和式(5)求得 $n = 1$, $v = 25$, $\gamma = 90\%$, $R = 99.9\%$ 的二维寿命分散系数

$$L_f(n, v) = 10^{k(n, v)s} = 5.5769$$

代入式(3)即得新产品置信度至少为 90%,可靠度为 99.9%的安全寿命 $\hat{t}_R$

$$t_R = t_{50}/L_f(n, \nu) = 18000/5.5769 = 3228\text{h}$$

例2 表1给出了某新型桨叶全尺寸疲劳试验结果和该厂以往生产的几种型号桨叶的全尺寸试件疲劳极限子样标准差。

表1 桨叶疲劳极限试验数据

	型号	$\hat{S}_{50i}$	n_i	s_i	ν_i
当前数据	1	82	5	6.7	4
	2	—	—	6.2	4
以往数据	3	—	—	7.1	4
	4	—	—	7.5	3
	5	—	—	6.4	3

与例1同样的理由,可以认为新型桨叶疲劳极限的分散性不会大于以往几种型号桨叶疲劳极限的分散性,即 $E(s_i^2) \leq E(s_i^2)$, 因此可取 $b_i=1, i=2, 3, 4, 5$ 。F检验的结果也支持这一结论。所以,可由式(18)求得组合标准差

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \nu_i s_i^2 / \sum_{i=1}^5 \nu_i} = 6.7766$$

再根据式(5)和式(11)求得 $n=5, \nu=18, \gamma=95\%, R=99.9\%$ 的二维强度缩减系数

$$r(n, \nu) = 1 - k(n, \nu) C_\nu(n, \nu) = 0.6222$$

代入式(10)即可求得新型桨叶置信度至少为 95%、可靠度为 99.9%的安全疲劳极限 $\hat{S}_R$

$$\hat{S}_R = r(n, \nu) \hat{S}_{50} = 0.6222 \times 82 = 51\text{MPa}$$

4 结束语

寿命分散系数和强度缩减系数在寿命估算和抗疲劳设计中有着重要应用^[4,5],但是过去都是一维的(即 $\nu=n-1$),以致于无法利用工程上积累的大量经验数据。而本文提出的二维寿命分散系数和二维强度缩减系数,则可以充分、科学地利用以往的经验数据,减少当前试验中的试件个数,提高预测精度。

参 考 文 献

1 傅惠民. 二维单侧容限系数方法. 航空学报, 1993; 14(3): A166- A172

2 傅惠民. 正态分布百分位值和百分率的置信限和容忍限公式. 航空学报, 1994; 15(1): 94- 101

3 傅惠民. 不完全数据秩分布理论. 航空学报, 1993; 14(11): A578- A584

4 Kamiyama T. Scatter Factor for Fatigue Life of Civil Aircraft Structure. Reliability Approach in Structural Engineering, Maruzen, 1975; 175- 189

5 Liard F. Fatigue of Helicopters—Service Life Evaluation Method. AGARD Report, 1979, 674

FULL LENGTH PAPERS

METHODS FOR NONDESTRUCTIVE INSPECTION RELIABILITY AND CONTROLLING LIVES

Fu Huimin and Qian Ruoli

(*Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083*)

ABSTRACT

It is difficult to determine a curve of the probability of crack detection (POD) with a high confidence level, since the traditional procedures require very large sample sizes. A new method of determining the POD curves is presented. The method requires only upwards of 30 independent inspections for determining a POD curve. The formulas of one-sided lower confidence limits of the POD curves and of POD/CL crack sizes are also established by means of Fisher information matrix. In order to predict and prevent mechanical failure through probabilistic damage tolerance design and analysis, the POD curves for multiple independent inspections have been studied, and a important concept of controlling lives and a method of the optimum independent inspection times are presented. This method can control the largest size of the cracks missed at inspections with high POD and confidence level, and the largest size of the missed cracks is used as the initial crack size for calculating the crack growth life of the structure in damage tolerance design. Thus the crack growth lives and inspection intervals of structures can be controlled to some extent. The method can also raise the crack detection probability and avoid the accidents caused by the missed cracks.

Key words Nondestructive inspection Damage Reliability analysis Fatigue life

TWO- DIMENSIONAL FACTORS OF LIFE SCATTER AND STRENGTH REDUCTION

Fu Huimin and Xiong Junjiang

(*Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083*)

ABSTRACT

In this paper, two-dimensional factors of life scatter and strength reduction are presented because of their extreme practical importance throughout life prediction and fatigue strength design. The factors can make full use of previous data and reduce the number of specimens in the present experiment. The safe life and safe strength obtained by them are more accurate than those by the traditional (one-dimensional) life scatter factor and strength reduction factor. They are applicable to the complete, the incomplete and the zero-failure data.

Key words Fatigue life Fatigue strength Reliability analysis